Lorentz- und metrikinvariante Skalare

R. FLEISCHMANN, Erlangen

(Z. Naturforsch. **26 a**, 331—333 [1971]; eingegangen am 11. Dezember 1970)

Herrn Prof. Dr. H. Maier-Leibnitz zum 60. Geburtstag gewidmet

Auf die Sonderstellung der metrikinvarianten (universell gequantelten) Skalare der Physik wird hingewiesen. Aus ihnen können die übrigen Größen definiert werden mit Hilfe von Länge und Zeit. Eine bevorzugte Stellung haben die alternierenden Differentialformen, weil sie sich als Ganzes wie metrikinvariante Skalare verhalten. Der Begriff orthogonal geht nicht ein.

In der Physik der Zukunft sollte der Unterschied zwischen klassischer und relativistischer Mechanik, klassischer und relativistischer Wellenmechanik verschwinden. Außerdem sollten die Gesetze der Wellenmechanik anders begründet werden können als durch korrespondenzmäßiges Erraten. Wenn man dieses Ziel anstrebt, muß man die Systematik der physikalischen Größen (Begriffe) überprüfen. Eine solche Systematik muß sich nach den Transformationseigenschaften richten und man wird zuerst nach Lorentz-invarianten Skalaren fragen.

Es gibt in der Physik einerseits Gesetzmäßigkeiten, die durch affine Transformationen nicht geändert werden, andererseits solche, bei denen die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Normalform $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ eingehen. Zu den ersteren gehören die Hauptgleichungen, zu den letzteren die sogenannten Materialgleichungen der Maxwellschen Theorie. Daher ist es naheliegend auch unter den Skalaren eine Unterteilung vorzunehmen nach solchen, die von den g_{ik} abhängen und solchen, die metrikinvariant sind, d. h. unabhängig von der Wahl der Koeffizienten g_{ik}.

Es gibt — wie sich zeigt — nur wenige *metrikinvariante* Skalare. Dazu gehören einerseits konstante skalare Größen und skalare Ortsfunktionen, andererseits alternierende Differentialformen, die als Ganzes Skalare sind. Nicht dazu gehören skalare Produkte von Vektoren mit sich selbst, weil die g_{ik} eingehen.

Beispiele von lorentzinvarianten Größen sind: Lichtgeschwindigkeit c, elektrische Ladung Q, Lagrange-Funktion. Davon ist skalar z. B. Q, nichtskalar dagegen c. Nichtinvariant sind Hamilton-Funktion, Energie, Energiedichte und Masse u. a.

Aus metrikinvarianten Skalaren lassen sich viele physikalische Größen durch Multiplikation oder Division mit Länge oder Zeit definieren, bei skalaren Ortsfunktionen durch Integration oder Differentiation nach Länge oder Zeit. Diese Größen werden bei einer Lorentztransformation geändert und man muß für jede von ihnen den Einfluß von $\sqrt{1-v^2/c^2}$ untersuchen.

Bevor man eine Systematik der Begriffe beginnt, muß festgelegt werden, welcher Bereich der Physik einbezogen werden soll. Außer Länge und Zeit sind dies in der vorliegenden Betrachtung die gut bekannten Gebiete: Dynamik, Elektrizität, Magnetismus, Thermodynamik. Sonstige Gebiete der Physik z. B. Gravitation, starke und schwache Wechselwirkung, bleiben vorerst außer Betracht.

Metrikinvariante Skalare: Im genannten Bereich gibt es die folgenden metrikinvarianten Skalare: Wirkung S, elektrische Ladung Q, magnetischer Fluß Φ, Entropie K, sowie Produkte und Quotienten daraus. Weitere scheint es in diesem Bereich nicht zu geben.

Es ist auffällig, daß gerade diese vier Größen in der Natur stets *in Quanten* geändert werden. Für sie und nur für sie gibt es universelle Quantenkonstanten, nämlich: Plancksches Wirkungsquantum h, Elementarladung e, magnetisches Flußquant Φ_0, Entropiekonstante (Boltzmann-Konstante) k. Natürlich ergeben auch Produkte und Quotienten daraus universelle Konstanten, so z. B.: h/e mit der Dimension S/Q, oder $2\,\Phi_0\, e/h = \gamma$, die Konstante der Maxwellschen Hauptgleichungen, mit der Dimension $Q\,\Phi/S$.

Alternierende Differentialformen: Aus einer metrikinvarianten skalaren Funktion von Ort und Zeit kann man weitere Größen mit Hilfe einfacher oder mehrfacher Differentiation nach den Ortskoordinaten x_i oder nach $x_4 = c\,t$ erhalten. Es ist besonders darauf hinzuweisen, daß am besten die alternierenden Differentialformen zur Definition solcher Grö-

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. R. FLEISCHMANN, *D-8520 Erlangen*, Langemarckplatz 9.

ßen herangezogen werden[1], denn sie sind affininvariant, enthalten also an keiner Stelle den Begriff orthogonal und sind als Ganzes skalar. Dann lassen sich grad, rot, div durch die äußere Differentiation alternierenden Differentialformen ersetzen. Dann geht der Begriff orthogonal nicht ein.

Durch die äußere Differentiation erhält man aus einer skalaren Funktion („Null-Form") eine äußere Differentialform 1. Stufe (1-Form), aus einer 1-Form eine 2-Form usw. Diese Differentialformen haben folgende Gestalt:

$$\text{0-Form:}\quad \omega^{(0)} = \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\text{1-Form:}\quad \omega^{(1)} = \sum_{1\le\nu\le n} \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu = \sum_{1\le i\le n} A_i^{(\mathrm{d})}\mathrm{d}x^i,$$

$$\text{2-Form:}\quad \omega^{(2)} = \sum_{1\le\nu\le n}\ \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial A_i}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^i$$

$$= \sum_{1\le j<i\le n} B_{ji}^{(\mathrm{d})}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i,$$

$$\text{3-Form:}\quad \omega^{(3)} = \sum_{1\le\nu\le n}\ \sum_{1\le j<i\le n} \frac{\partial B_{ji}}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

$$= \sum_{1\le k<j<i\le n} C_{kji}^{(\mathrm{d})}\,\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i.$$

Dabei ist $\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ usw.

Unter der zweiten Summe stehen nur aufsteigende Indizes z. B. im Fall $n=4$, $p=2$ die Indizes 12, 13, 14, 23, 24, 34; im Fall $n=4$, $p=3$ die Indizes 123, 124, 134, 234; im Fall $n=4$, $p=4$ die Indizes 1234.

Für solche Differentialformen gilt der Poincarésche Satz:

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega^{(p)} \equiv 0$$

dabei bedeutet d die äußere Differentiation. Nach diesem Satz werden die von $A_i^{(\mathrm{d})}$, von $B_{ji}^{(\mathrm{d})}$, von $C_{kij}^{(\mathrm{d})}$ herrührenden Anteile bei der nachfolgenden äußeren Differentiation $\equiv 0$. Dieser Satz ersetzt rot grad $\equiv 0$, div rot $\equiv 0$.

Die Koeffizienten $A_i^{(\mathrm{d})}$ der Form $\omega^{(1)}$ sind über einen Differentiationsprozeß abgeleitet worden, daher ist der obere Index (d) hinzugefügt. $A_i^{(\mathrm{d})}$ sind die Koeffizienten einer 1-Form, die rot-frei ist. Um den allgemeinen Fall zu erhalten, muß eine 1-Form gleicher Struktur hinzugefügt werden. Ihre Koeffizienten sollen mit $\tilde{A}_i$ bezeichnet werden. Auf $A_i = A_i^{(\mathrm{d})} + \tilde{A}_i$ wird die äußere Differentiation angewendet, dann entsteht eine 2-Form $\omega^{(2)}$ mit den Koeffizienten $B_{ji}^{(\mathrm{d})}$. Sie bestimmen eine 2-Form, die div-frei ist. Man erhält den allgemeinen Fall, indem man $\tilde{B}_{ji}$ hinzufügt. Unterwirft man die Form mit den Koeffizienten $B_{ji} = B_{ji}^{(\mathrm{d})} + \tilde{B}_{ji}$ der äußeren Differentiation, so entsteht die 3-Form $\omega^{(3)}$ mit den Koeffizienten $C_{kji}^{(\mathrm{d})}$ usw.

Der Übergang von $\psi \to \mathrm{d}\psi$ ersetzt die grad-Bildung, der Übergang $\omega^{(1)} \to \mathrm{d}\omega^{(1)}$ die rot-Bildung, der Übergang $\omega^{(2)} \to \mathrm{d}\omega^{(2)}$ die div-Bildung, der Übergang $\omega^{(3)} \to \mathrm{d}\omega^{(3)}$ liefert in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt die Kontinuitätsgleichung. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß die Differentiationsvorschrift beim Übergang von $n=3$ zu $n=4$ usw. nicht abgeändert zu werden braucht, anders als bei rot und div.

An Stelle einer abstrakt mathematischen Funktion, von der bisher die Rede war, kann man eine Funktion ψ mit der physikalischen Dimension S, Q, Φ, K einführen. ψ, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ usw. haben dann dieselbe physikalische Dimension.

Wenn man den magnetischen (Ring-)Fluß durch eine skalare Funktion Φ beschreibt, liefert die daraus abgeleitete 1-Form die Koordinaten (oft fälschlich Komponenten genannt) des magnetischen Vektorpotentials (Ringfluß/Länge), die 2-Form die Koordinaten der magnetischen Flußdichte (Fluß/Fläche), die 3-Form die Koordinaten der magnetischen Quellflußdichte (Fluß/Volumen), die allerdings in diesem magnetischen Fall überall $=0$ ist.

Wenn man eine skalare Funktion einführt, welche die Verteilung des elektrischen Flusses (bzw. der elektrischen Ladung) beschreibt, dann liefert die daraus abgeleitete 1-Form die Koordinaten des elektrischen Vektorpotentials, der elektrischen Flußdichte (Ladung/Fläche), der elektrischen Quellflußdichte (Ladung/Volumen).

Alle diese Größen können durch Formen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ usw. *definiert* werden.

Unter Benützung der alternierenden Differentialformen lautet der Stokessche Satz in metrikinvarianter Form:

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega\,.$$

Dabei ist ω eine alternierende Differentialform (p-ter Stufe), $\mathrm{d}\omega$ die durch äußere Differentiation daraus entstandene alternierende Differentialform

[1] E. Kähler, Abh. Math. Seminar Univer. Hamburg **12**, 1 [1938]. — R. Fleischmann, Tagungsjahrbuch (Deutscher Physikertag 1962), Bd. **10**, S. 209. — H. Flanders, Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, New York, London 1963.

$(p+1)$-ter Stufe. G ist ein p-dimensionales Integrationsgebiet, ∂G der $(p-1)$-dimensionale Rand des Integrationsgebietes. Äußere Differentialformen und Stokesscher Satz sind dann in einer gegen *affine* Transformationen invarianten Form, also metrikinvariant formuliert, d. h. ohne Benützung des Begriffes orthogonal.

Wenn man von metrikinvarianten Skalaren ausgeht und nur Länge und Zeit heranzieht, gelangt man auf direktem Weg zu Größen, die zu klassifizieren sind als Skalar · Länge, Skalar · Fläche usw., Skalar · $(\text{Länge})^{-1}$, Skalar · $(\text{Länge})^{-2}$ usw. bzw. Skalar · Zeit, Skalar · $(\text{Zeit})^{-1}$, Skalar · $(\text{Zeit})^{-2}$ usw. Andere Größen, wie z. B. Trägheitsmoment und dergleichen sind hier nicht einbezogen, weil sonst auf die Tensormultiplikation eingegangen werden müßte und dabei eine Vielzahl neuer Fragen auftreten würde.